

VEŽBE IZ MATEMATIKE 1

SMER: DIPLOMIRANI BIBLIOTEKAR

Snežana Gordić
Pedagoški fakultet u Somboru

Zimski semestar 2021/2022

Literatura

[1] A. Petojević, *Matematika*, Pedagoški fakultet u Somboru, Sombor, 2014.

Predispitni bodovi

- **Vežbe.** 5 bodova se dobija za prisustvo vežbama i/ili urađene zadatke za samostalan rad (uredno ispisani i predati do kraja zimskog semestra). Bodovi se upisuju u indeks na poslednjim vežbama.
- **Kolokvijum 1.** Sastoji se iz dva zadatka i može se dobiti maksimalno 15 bodova. Prvi zadatak (8 bodova) je iz oblasti Matematička logika, a drugi zadatak (7 bodova) je iz oblasti Skupovi.
- **Kolokvijum 2.** Sastoji se iz dva zadatka i može se dobiti maksimalno 20 bodova. Prvi zadatak (10 bodova) je iz oblasti Relacije, a drugi zadatak (10 bodova) je iz oblasti Funkcije.

Na **kolokvijum** obavezno poneti **INDEKS**! Na kolokvijumu i ispitu je dozvoljena upotreba udžbenika [1]. Vreme za izradu kolokvijuma je 60 minuta. Studenti koji nisu zadovoljni bodovima sa kolokvijuma mogu popravljati kolokvijum na predavanjima.

Konsultacije

- Utorak $15^{30} - 17^{30}$
- Za dodatne termine ili online konsultacije poslati e-mail.

Kontakt

- **Kabinet:** 44
 - **e-mail:** gordicsnezana@gmail.com ili snezana.gordic@pef.uns.ac.rs
-

- Iskaz, istinitosna vrednost iskaza i logički veznici su osnovni pojam logike i ne definišu se.
- Pod iskazom podrazumevamo rečenicu kojoj se može odrediti istinitosna vrednost (njena istinitosna vrednost je ili tačno ili netačno). Oznaka: $p, q, r, \dots$.
- Istinitosna vrednost iskaza p , u oznaci $v(p)$ je

$$v(p) = \begin{cases} \top, & \text{ako je } p \text{ tačan iskaz} \\ \perp, & \text{ako je } p \text{ netačan iskaz} \end{cases}$$

- Logički veznici: i ($\wedge$), *ili* ($\vee$), *ako ... onda* ($\Rightarrow$), *ako i samo ako* ($\Leftrightarrow$), *nije* ($\neg$).

Operacije sa iskazima:

- **Konjunkcija** dva iskaza p i q je iskaz " p i q " u oznaci $p \wedge q$. Istinitosna vrednost iskaza $p \wedge q$ je tačna samo u slučaju $v(p) = v(q) = \top$
- **Disjunkcija** dva iskaza p i q je iskaz " p ili q " u oznaci $p \vee q$. Istinitosna vrednost iskaza $p \vee q$ je netačna samo u slučaju $v(p) = v(q) = \perp$
- **Implikacija** dva iskaza p i q je iskaz " p sledi q " (ili " p ako i samo ako q ") u oznaci $p \Rightarrow q$. Istinitosna vrednost iskaza $p \Rightarrow q$ je netačna samo u slučaju kada $v(p) = \top$ and $v(q) = \perp$.
- **Ekvivalencija** dva iskaza p i q je iskaz " p ekvivalentno sa q ", (ili p ako i samo ako q) u oznaci $p \Leftrightarrow q$. Istinitosna vrednost iskaza $p \Leftrightarrow q$ je tačna kada $v(p) = v(q)$.
- **Negacija** iskaza p je iskaz "Ne p " u oznaci $\neg p$. Istinitosna vrednost iskaza $\neg p$ je suprotna od istinitosne vrednosti iskaza p .

Složeni iskazi ili **iskazne formule** se definišu na sledeći način:

- 1) Iskazna slova su iskazne formule.
- 2) Ako su A i B formule, onda su to i $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B, \neg A$.
- 3) Formule se mogu obrazovati samo konačnom primenom 1) i 2).

Da bi iskazna formula bila nedvosmisleno zapisana koriste se i zagrade. Prioritet operacija je sledeći:

- 1) negacija,
- 2) konjunkcija i disjunkcija,
- 3) implikacija i ekvivalencija.

1. Zaokružiti iskaze, a zatim i odrediti njihove istinitosne vrednosti.

- (a) $1 + 1 = 2$
- (b) $1 + 1 = 3$
- (c) Kako se ti zoveš?
- (d) $x^2 = 4$
- (e) $ab > 0$, ako su a i b istog znaka
- (f) Paran broj se može napisati u obliku $2n$, gde je n prirodan broj.
- (g) Hladno je.
- (h) Zbir uglova u četvorouglu je 180° .
- (i) $5^2 + 5^4 = 5^6$
- (j) $3 - 7 \cdot (2 + 3) = 3 - 7 \cdot 2 - 7 \cdot 3$
- (k) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2+4}{7}$
- (l) $(x - 1)^3 = 8$.
- (m) Kruška je najukusnije voće.

2. Odrediti istinitosne vrednosti složenih iskaza (formula):

- (a) Brazil se većim delom nalazi na severnoj hemisferi i izlazi na Atlanski okean.
- (b) $(2 > 5) \wedge (3 < 9)$
- (c) $(2 > 5) \vee (3 < 9)$
- (d) $(5 - 4 = 1) \wedge (-6 < -2)$
- (e) $(3n \text{ je deljivo sa } 3 \text{ za sve } n \in \mathbb{N}) \vee (3n + 1 \text{ je deljivo sa } 3 \text{ za sve } n \in \mathbb{N})$
- (f) $(-6)^2 = -36 \vee (4n + 1 \text{ je paran broj za sve } n \in \mathbb{N})$
- (g) $(12.34 - 3.28 : 0, 4 = 4.14) \Leftrightarrow (5.03 \cdot 2.4 - 6.832 = 5.24)$
- (h) $\left(4\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} = 1\frac{7}{10}\right) \Rightarrow \left(2\frac{3}{5} : 1\frac{1}{2} + 3\frac{2}{7} : \frac{5}{6} = \frac{3}{7}\right)$
- (i) $2 \mid 164 \wedge 3 \mid 123456 \wedge 4 \mid 1096 \wedge 5 \mid 100125 \wedge 6 \mid 108$

3. Odrediti istinitosnu vrednost formula:

- (a) $(18 : 5 - 1 < -4 + 5 \cdot 2) \vee ((-(-11 + 34) : 5 = 17) \wedge (8 \cdot 2 > 2)),$
- (b) $(0.05 : 0.01 = 0.4) \Rightarrow ((1.1 + 2.2 - 4.4 > 1.5) \wedge (1.1 \cdot 2.2 < 3.3)),$
- (c) $\neg \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6} < \frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} > \frac{7}{6}\right).$

4. Dati su iskazi: $p : (-2)(-3) = -(-6)$; $q : \frac{1}{5} = 0.2$, $r : -3^2 = (-3)^2$. Odrediti istinitosnu vrednost formule

$$F : \neg p \Rightarrow (q \vee r).$$

5. Date su formule:

- $F_1 : p \wedge r,$
- $F_2 : p \wedge \neg q \Rightarrow r,$
- $F_3 : (p \vee \neg r) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r),$
- $F_4 : r \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg p \vee q,$

Odrediti istinitosnu vrednost datih formula ako su p, q i r dati sa:

$$p : \text{Broj } 3 \text{ je prost broj}; \quad q : 1.26 : 0.04 + 2.57 = 29.7; \quad r : \sqrt[3]{-8} = -4 : 2.$$

6. Date su formule:

- $F_1 : \neg p \vee q,$
- $F_2 : p \wedge (\neg q \Rightarrow r),$
- $F_3 : \neg r \Rightarrow p \wedge q,$
- $F_4 : (p \vee \neg q) \wedge r \Rightarrow (p \vee (q \Rightarrow p)).$

Odrediti istinitosnu vrednost datih formula ako su p, q i r dati sa:

$$p : 3 \mid 6; \quad q : \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(2 + \frac{1}{3}\right) : \frac{4}{5} = \frac{37}{12}; \quad r : 1998 \text{ je paran broj}.$$

7. Dati su iskazi: $p : 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$; $q : \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{4}{7}$, $r : \frac{8}{9} : \frac{4}{3} = \frac{8 : 4}{9 : 3}$. Odrediti istinitosnu vrednost formule

$$F : p \wedge \neg(q \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg p).$$

8. Sastaviti istinitosne tablice za sledeće formule:

$$F_1 : (p \vee \neg q) \Rightarrow \neg r$$

$$F_2 : (p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg q \vee \neg r)$$

$$F_3 : (p \vee q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$$

Zadaci za samostalan rad

1. Dati su iskazi:

$$p : 15 : 5 - 1 < -4 + 5 \cdot 2, \quad q : -(-11 + 36) : 5 = 5, \quad r : -8 \cdot (-2) > 2, \quad s : 2 + 2 : 2 = 2.$$

Odrediti njihovu istinitosnu vrednost, a potom Odrediti njihovu istinitosnu vrednost, a potom odrediti istinitosnu vrednost formule

$$(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s).$$

- **Tautologija** je logička formula $F = F(p, q, r, \dots)$ koja za sve vrednosti svojih promenljivih $p, q, r, \dots$ ima istinitosnu vrednost tačno.
- **Kontradikcija** je logička formula $F = F(p, q, r, \dots)$ koja za sve vrednosti svojih promenljivih $p, q, r, \dots$ ima istinitosnu vrednost netačno.

Koristimo dve metode da dokažemo da je formula tautologija:

- 1) metod tablice istinitosti,
- 2) metod svođenja na apsurd (protivrečnost).

- **Univerzalni kvantifikator** označava se sa $\forall$ i služi za konstrukciju rečenica oblika $(\forall x)B(x)$ u značenju: “za svako x važi $B(x)$ ”.
- **Egzistencijalni kvantifikator** označava se sa $\exists$ i služi za konstrukciju rečenica oblika $(\exists x)B(x)$ u značenju: “postoji x za koje važi $B(x)$ ”.

Ograničeni (uslovni) kvantifikatori:

$$(\forall x \in A)B(x) \quad \text{ i } \quad (\exists x \in A)B(x)$$

Važe sledeće formule:

$$\begin{array}{ll} \neg(\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg B(x) & \neg(\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg B(x) \\ (\forall x)(B(x) \wedge C(x)) \Leftrightarrow (\forall x)B(x) \wedge (\forall x)C(x) & (\exists x)(B(x) \wedge C(x)) \Leftrightarrow (\exists x)B(x) \wedge (\exists x)C(x) \\ (\forall x)(B(x) \vee C(x)) \Leftrightarrow (\forall x)B(x) \vee (\forall x)C(x) & (\exists x)(B(x) \vee C(x)) \Leftrightarrow (\exists x)B(x) \vee (\exists x)C(x) \end{array}$$

1. Sastaviti istinitosne tablice za sledeće formule:

$$\begin{array}{l} F_1 : (\neg p \Leftrightarrow \neg(\neg p)) \wedge (p \vee \neg p) \\ F_2 : p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \\ F_3 : (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q) \end{array}$$

Koje su od datih formula tautologije? Koje su od datih formula kontradikcije?

2. Dokazati da su sledeće iskazne formule tautologije:

$$\begin{array}{ll} F_0 : p \vee \neg p & (\text{zakon isključenja trećeg}) \\ F_1 : \neg(p \wedge \neg p) & (\text{zakon neprotivrečnosti}) \\ F_2 : p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r & (\text{asocijativnost operacije } \wedge) \\ F_3 : p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) & (\text{distributivnost } \vee \text{ prema } \wedge) \\ F_4 : \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) & (\text{De Morganov zakon}) \\ F_5 : \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) & (\text{De Morganov zakon}) \\ F_6 : ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) & (\text{tranzitivnost operacije } \Rightarrow) \\ F_7 : p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p & (\text{zakon apsorpcije}) \\ F_8 : (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) & (\text{zakon kontrapozicije}) \\ F_9 : (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) & (\text{zakon uklanjanja } \Leftrightarrow) \end{array}$$

3. Polazeći od suprotne pretpostavke, da za neke vrednosti promenljivih formula ima vrednost $\perp$, dokazati da su sledeće formule tautologije. Ova se metoda naziva svođenje na apsurd (protivrečnost).

$$\begin{array}{ll} F_1 : ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p \\ F_2 : (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p & (\text{Reducio ad absurdum}) \end{array}$$

4. Dat je skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Odrediti istinitosnu vrednost sledećih tvrđenja.

$$\text{a: } (\exists x \in A)(x + 3 = 10), \quad \text{b: } (\forall x \in A)(x + 3 < 10), \quad \text{c: } (\forall x \in A)(x + 1 > 1).$$

5. Koje su od sledećih rečenica tačne u skupu prirodnih brojeva?

$$\begin{array}{lll} \text{a: } (\exists x)(x < 10), & \text{c: } (\forall x)(x \cdot 1 = 1), & \text{e: } \neg(\exists x)(x \geq 2), \\ \text{b: } (\forall x)(x \geq 0), & \text{d: } (\exists x)(3x + 2 = 6), & \text{f: } \neg(\forall x)(x > 10 \vee x < 5.) \end{array}$$

6. Zapisati matematičko logičkim jezikom:

- (a) Ako je broj deljiv sa 2 deljiv je i sa 16.
- (b) Ako je broj deljiv sa 3 i 5 deljiv je i sa 15.
- (c) Postoji broj x takav da je njegov kub manji od -8 .
- (d) Sabiranje prirodnih brojeva je komutativno.
- (e) Za svaki prirodan broj x , postoji broj y tako da $x + y \leq 2$.
- (f) Zbir dva cela broja je ceo broj.
- (g) Ako je prirodan broj deljiv sa 10, onda je on deljiv i sa 2 i sa 5.
- (h) Za svaki prirodan broj x postoji prirodan broj y takav da je $3x + 5 = y$.
- (i) Proizvod pozitivnog i negativnog celog broja je negativan ceo broj.
- (j) Postoji ceo broj takav da je njegov kub manji od -27 .

7. Sledeći formulski zapis napisati rečima:

- (a) $(\exists x \in \mathbb{N})(x = 1)$,
- (b) $(\exists x \in \mathbb{N})(x = 1 \vee x > 5)$,
- (c) $(\forall x)(x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q})$,
- (d) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(x^2 > y - 1)$,
- (e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((x \cdot y)^2 \geq x \cdot y)$,

8. Govornim jezikom iskazati sledeće formule:

- (a) $\neg(\exists x \in \mathbb{R})(x < 2 \wedge x < 3)$,
- (b) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(x + y = 0)$,
- (c) $(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x > 0)$,
- (d) $(\exists x \in \mathbb{R})(0.2 < x < 0.4)$,
- (e) $(\exists x)(x \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{N})$.

9. Dat je iskaz p . Napisati iskaz $\neg p$. Koji iskaz je tačan p ili $\neg p$?

- | | | |
|--|--|---|
| a) $p : (\exists x \in \mathbb{N})(x + 1 = 8)$, | c) $p : (\exists x \in \mathbb{Z})(x + 2 = 3)$, | e) $p : (\exists x \in \mathbb{N})(x + 7 = 11)$, |
| b) $p : (\exists x \in \mathbb{N})(x + 2 = 3)$, | d) $p : (\exists x \in \mathbb{Z})(x^2 = 3)$, | f) $p : (\forall x \in \mathbb{N})(x > 0)$. |

Zadaci za samostalan rad

1. Dokazati da je formula $(p \vee q) \wedge p \Rightarrow (p \vee \neg q)$ tautologija.
2. Sledeću rečenicu zapiši govornim jezikom: $(\forall x, y, z \in \mathbb{N})(x + (y + z) = (x + y) + z)$.
3. apisati negaciju sledeće rečenice: $(\exists x \in \mathbb{N})(x > 2 \wedge x < 5)$.

- Skup je osnovni pojam i ne definiše se.
- Svaki skup u potpunosti određuju njegovi elementi.
- Skupovi se zadaju: navođenjem elemenata (analitički), navođenjem svojstva koje zadovoljavaju svi elementi skupa (sintetički) ili Venovim dijagramima.
- Da element a pripada skupu A označavamo sa $a \in A$, a u suprotnom pišemo $a \notin A$.
- Broj elemenata skupa, kardinalnost, označavamo sa $\text{card } A$ ili $|A|$.
- Skup koji nema elemenata naziva se prazan skup i označava sa $\{ \}$ ili sa $\emptyset$.
- **Jednaki skupovi:** $A = B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$
- **Podskup:** $A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$
- **Pravi podskup:** $A \subset B \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x)(A \neq B \wedge A \subseteq B)$

Operacije sa skupovima:

- **Presek:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- **Unija:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **Razlika:** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Komplement skupa A u odnosu na skup B :** $\bar{A} = C_B(A) = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$
- **Simetrična razlika:** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- **Partitivni skup:** $P(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$
- **Dekartov proizvod:** $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

- Navesti skup A čiji su elementi brojevi 2, 4, 6, 8 na tri različita načina.
- Analitički zadati skup čiji elementi imaju osobinu da su to:
 - Svi prirodni brojevi pete desetice.
 - Svi dvocifreni brojevi čiji je zbir cifara manji od 4.
 - Svi trocifreni brojevi čiji je proizvod cifara 2.
 - Sintetički zadati skup čiji elementi imaju osobinu da su to:
 - Svi celi brojevi između -10 i 8 uključujući i 8 .
 - Svi prirodni brojevi koji deljenjem sa 4 daju ostatak 2 .
 - Svi prirodni brojevi koji su deljivi sa 3 i sa 5 .
- Da li su skupovi $X = \{1, 2, a, b, d, b\}$ i $Y = \{2, a, b, d, d, 4\}$ jednaki?
- Da li su skupovi $X = \{1, 2, 4, 1\}$ i $Y = \{1, 2, 4\}$ jednaki?
- Za dati skup $A = \{1, a, b, c, 3, d, 6\}$ navesti jedan skup B , takav da je $A \subset B$.
- Neka je $S = \{r, s, t\}$. Tačna tvrđenja zaokruži, a netačno precrtaj:
 - $r \in S$,
 - $r \notin S$,
 - $\{r\} \in S$
 - $\{r\} \subset S$,
 - $\{s, t\} \in S$,
 - $\{r, s, t\} \subset S$,
 - $\{r, s, t\} \subseteq S$.
- Tačna tvrđenja zaokruži, a netačno precrtaj:
 - $\emptyset = \{\emptyset\}$,
 - $\emptyset \in \emptyset$,
 - $0 \in \emptyset$,
 - $0 = \emptyset$,
 - $\emptyset \in \{\emptyset\}$,
 - $\emptyset \in \{0, \emptyset\}$,
 - $\emptyset \subset \{0, \emptyset\}$.
- Neka je skup $P = \{1, \{2, 3\}, 3\}$. Tačna tvrđenja zaokruži, a netačno precrtaj:
 - $\{1\} \in P$,
 - $\{3, 2\} \in P$,
 - $\{\{2, 3\}\} \subset P$,
 - $3 \in P$,
 - $1 \in P$,
 - $\{2, 3\} \subseteq P$,
 - $2 \in P$,
 - $\{1, 3\} \subseteq P$.

9. Tačna tvrđenja zaokruži, a netačna precrtaj:
- a) $\{a\} \in \{a, b, c\}$, c) $a \in \{a, b, c\}$, e) $\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$,
b) $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$, d) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$, f) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$.
10. Neka je $A = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$. Odrediti x tako da važi: a) $x \in A$, b) $x \subset A$.
11. Neka je dat skup $S = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- a) Navesti sve elemente skupa S .
b) Navesti sve podskupove skupa S .
12. Skup A čine slova reči *PARAN*, a skup B čine slova reči *PODUDARAN*. Odrediti skupove A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$, $A \Delta B$.
13. Dati su skupovi: $A = \{m, n, p, q\}$, $B = \{m, n, r\}$ i $C = \{m, p, q\}$. Odrediti skupove: $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap C) \cup B$, $(A \setminus B) \setminus C$, $C_A(C)$, $C_B(C)$.
14. Odrediti partitivan skup datog skupa: a) $A = \{a\}$, b) $B = \{a, b\}$, c) $C = \{a, b, c\}$.
15. Dati su skupovi:
- $$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 4\}$$
- $$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 2 < 3\},$$
- $$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 12\},$$
- $$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ je prost broj} \wedge x < 8\},$$
- $$E = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 3\},$$
- $$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}.$$
- Odrediti skupove:
- a) $(A \cup B) \setminus (C \cup D)$, c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D)$, e) $(A \Delta B) \cap (F \Delta C)$,
b) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$, d) $(E \cap C) \cup (F \cap D)$, f) $(A \Delta F) \setminus (E \cup C)$,
16. Dati su skupovi $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 3 \leq |x| \leq 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2x + 3 \leq 11\}$ i $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 0\}$. Predstaviti skupove A, B i C Venovim dijagramima i izračunati:
- a) $A \cup B \cup C$, b) $(A \cap B) \cup C$, c) $A \setminus (B \cup C)$.
17. Dati su skupovi: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$. Odrediti skupove: $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ i $B \times B$. Prikazati grafički skup $A \times B$.
18. Dat je skup $S = \{1, 2, 5, 8, 9, 11, 15\}$ i njegovi podskupovi $A = \{2, 8, 9, 15\}$, $B = \{1, 2, 11, 15\}$, $C = \{8, 11, 15\}$. Odrediti skup
- $$M = ((A \cap B) \cap C) \cup ((S \setminus B) \cup (S \setminus (B \cup C))).$$
19. Koje su od sledećih jednakosti tačne?
- a) $\{3, 1\} = \{1, 3\}$ c) $(1, 2, 1) = (1, 1, 2)$; e) $(1, 2) = (4 - 3, 1 + 1)$;
b) $(1, 3) = (3, 1)$; d) $\{1, 2, 1\} = \{1, 2, 2\}$; f) $(0, 0) = \emptyset$.
20. Neka su skupovi A, B i C takvi da važi $A \subset B \subset C$. Odrediti skupove:
- a) $A \cup B$, b) $A \cup C$, c) $(A \cap B) \cup C$, d) $(A \cap C) \cup B$, e) $(A \cup B) \cap C$, f) $(A \cup C) \cap B$.

Zadaci za samostalan rad

- Odrediti elemente skupova A i E ako je $A \cup E = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \setminus E = \{2, 6\}$ i $E \setminus A = \{7, 8, 9\}$.
- Dekartov proizvod dva skupa M i N je skup $\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5)\}$. Koji su elementi skupa M , a koji skupa N ? Odrediti partitivni skup skupa M .
- Dati su skupovi: $A = \{640 : 80, (79 + 65) : 12, 400 : 25, 9.4 : 0.94\}$ i $B = \{(0.720 - 0.380) : 0.034, 33.6 : 2.8, 0.6 \cdot 30\}$. Odrediti: $A \cap B$, $A \setminus B$.

4 Skupovi

Datum: 03.11.2021.

1. Odrediti skup S tako da budu tačne sledeće formule: $S \cap \{1, 3, 6, 9\} = \{3, 6\}$, $S \cup \{2, 3, 9, 11\} = \{2, 3, 5, 6, 9, 11\}$, $\{6, 11\} \subset S$. Zatim odrediti skup $A = S \setminus \{1, 2, 6, 11\}$ i $\mathcal{P}(A)$.
2. Ako je $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, $A \cap B = \{3, 6, 8\}$, $A \cup \{1, 6, 8\} = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, $\{3, 4, 6\} \cup B = \{1, 3, 4, 6, 8\}$, odrediti skupove A i B .
3. Odrediti elemente skupova A, B, C , ako je $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{4\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 4, 5\}$, $C \setminus B = \{2, 4\}$ i $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$.
4. Dati su skupovi $A = \{a \mid a \mid 18 \wedge a \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b \mid b \mid 30 \wedge b \in \mathbb{N}\}$, $C = \{c \mid c \mid 45 \wedge c \in \mathbb{N}\}$. Odrediti skup X , koji zadovoljava sledeće uslove: $X \cap A = X$, $X \cap B = X \cap C = A \cap B \cap C$, $X \setminus B = X \setminus C \neq \emptyset$.
5. Svaki učenik jednog odeljenja uči bar jedan od tri strana jezika: engleski, nemački i francuski. 21 učenik uči engleski jezik, 18 nemački i 14 francuski. 11 uči engleski i francuski, 3 uči nemački i francuski, 4 engleski i nemački, a 2 učenika uče sva tri jezika. Koliko učenika ima u odeljenju i koliko njih uči tačno dva strana jezika?
6. U jednoj porodici je bilo mnogo dece. Sedmorod od njih voli kupus, šestoro krompir, petoro papriku. Četvoro je volelo kupus i krompir, troje kupus i papriku, a dvoje krompir i papriku. Jedno dete je rado jelo i kupus i krompir i papriku. Koliko je dece bilo u toj porodici?
7. Određen broj ljudi ispitan je o mestu u kojem najradije provode odmor na teritoriji Srbije. Izabrana su tri mesta: Palić, Divčibare i Vrnjačka Banja. 6 osoba voli sva tri mesta, 8 voli Palić i Divčibare, 10 voli Divčibare i Vrnjačku Banju, 12 voli Vrnjačku Banju i Palić, 5 voli samo Palić, 3 voli samo Divčibare, 7 voli samo Vrnjačku Banju.
 - a) Koliko ljudi je ispitano?
 - b) Koje mesto je najomiljenije?
 - c) Koje mesto je najmanje popularno?
8. U sportsku prodavnicu je jednog dana ušlo 49 kupaca i svako od njih je kupio bar jedan proizvod: ranac ili patike.
 - a) Koliko kupaca je kupilo oba proizvoda, ako je samo patike kupilo 18, a samo ranac njih 20?
 - b) Koliko je ranaca prodato tog dana?
9. Jedno odeljenje ima 32 učenika, od kojih 18 prima „Zabavnik“, a 13 je pretplaćeno na „Dečije novine“. Koliko učenika prima oba lista, ako 8 učenika nije pretplaćeno ni na jedan list?
10. Na Balkanskom kongresu matematičara svaki od 100 učesnika govori bar jedan od stranih jezika: engleski, francuski ili ruski. Ruski jezik govori 57 učesnika, ruski i francuski 28, engleski i francuski 34, a 5 učesnika govori samo francuski. Samo dva strana jezika govori 49 učesnika, a sva tri 11 učesnika.
 - a) Koliko učesnika govori francuski jezik?
 - b) Koliko učesnika govori samo engleski jezik?
 - c) Koliko učesnika ne govori francuski jezik?

Zadaci za samostalan rad

1. Na pitanje koje od tri vrste voća (banane, grožđe i kruške) vole, učenici jednog odeljenja su se izjasnili: njih 8 voli sve tri vrste voća, 14 voli grožđe i banane, 12 voli grožđe i kruške, a 13 voli kruške i banane, 2 samo kruške, 3 samo grožđe, i 4 samo banane. Koliko učenika ima u odeljenju? Koliko učenika voli banane? Koliko učenika voli grožđe? Koliko učenika voli kruške?

1. (8 bodova)

- (a) Pokazati da je sledeća formula tautologija: $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$.

- (b) Sledeći formulski zapis napisati rečima: $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(x + y = y + x)$

- (c) Zapisati matematičko logičkim jezikom: *Svi prirodni brojevi su celi.*

2. (7 bodova)

- (a) Dati su skupovi $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, \{a\}\}$ i $C = \{a, \{a\}, b, \{d\}\}$. Date skupove predstaviti Venovim dijagramom.

Venov dijagram:

Odrediti:

$A \cap B =$ _____,

$A \cup B =$ _____.

$\mathcal{P}(B) =$ _____.

$(A \cap C) \setminus B =$ _____,

$A \setminus (B \cup C) =$ _____.

$C_C(B) =$ _____.

- (b) Svako od upitanih jedanaestoro ljudi ima bar jedan od dva uređaja - mobilni telefon ili računar. Desetoro ljudi ima mobilni, a osmoro računar. Koliko ljudi ima i mobilni telefon i računar?

Odgovor: _____.

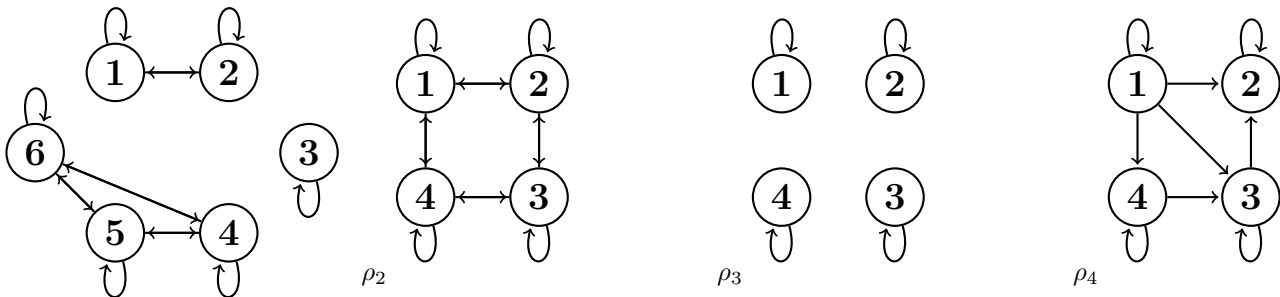
- **n -arna relacija**, u oznaci ρ , je bilo koji podskup Dekartovog proizvoda n skupova.
- **Binarna relacija** skupa A je svaki podskup skupa $A^2 := A \times A$. Ako je $\rho \subset A \times B$ i $(x, y) \in \rho$, kažemo da je x u relaciji ρ sa y , što nekada označavamo $x\rho y$.
Za relaciju $\rho \subset A^2$ kažemo da je:
 - refleksivna (R) ako $(\forall x \in A)(x\rho x)$
 - antirefleksivna (AR) ako $(\forall x \in A)\neg(x\rho x)$
 - simetrična (S) ako $(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
 - antisimetrična (AS) ako $(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$
 - tranzitivna (T) ako $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$
- **Unija binarnih relacija** ρ_1 i ρ_2 je skup $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(x, y) | (x, y) \in \rho_1 \vee (x, y) \in \rho_2\}$.
- **Presek binarnih relacija** ρ_1 i ρ_2 je skup $\rho_1 \cap \rho_2 = \{(x, y) | (x, y) \in \rho_1 \wedge (x, y) \in \rho_2\}$.
- **Inverzna binarna relacija** relacije ρ je skup $\rho^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in \rho\}$.

1. Dat je skup brojeva $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na tom skupu su date relacije R_1 , R_2 i R_3 na sledeći način:

$$(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow x < y, \quad (x, y) \in R_2 \Leftrightarrow x \text{ je dva puta veće od } y, \quad (x, y) \in R_3 \Leftrightarrow x|y.$$

Prikaži te relacije skupom uređenih parova, tabelarno ili grafički.

2. Na skupu $A = \{-2, 0, 1, 2, 3, 9\}$ definisana je relacija ρ "ima isti ostatak kod deljenja sa 2". Predstaviti datu relaciju kao skup uređenih parova, tabelarno ili grafom.
3. Na skupu $A = \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ definisana je relacija $\subseteq$. Predstaviti datu relaciju kao skup uređenih parova, tabelarno ili grafom.
4. Grafički su prikazane relacije ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 i ρ_4 . Predstaviti date relacije kao skup uređenih parova.



5. Na skupu $A = \{a, b, c, d, e\}$ za date relacije

$$\rho_1 = \{(b, a), (c, e), (d, d), (e, d), (a, a)\} \quad \text{ i } \quad \rho_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (e, e), (b, a)\}$$

naći: $\rho_1 \cup \rho_2$, $\rho_1 \cap \rho_2$, ρ_1^{-1} i ρ_2^{-1} .

6. U skupu $X = \{1, 3, 5, 15, 18, 25, 30, 45\}$ data je relacija ρ na sledeći način: $x\rho y \Leftrightarrow x|y$. Odrediti datu relaciju na pogodan način (kao skup uređenih parova, tabelarno ili grafom).
7. U skupu $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ definisana je relacija $x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Odrediti datu relaciju na pogodan način.
8. Na skupu $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ data je relacija ρ na sledeći način $x\rho y \Leftrightarrow x < y - 1$. Datu relaciju predstaviti grafom i tabelarno.
9. Na skupu $A = \{-0, 1, 3, 6, 9, 18\}$ data je relacija ρ na sledeći način $x\rho y \Leftrightarrow x = 3y$. Datu relaciju predstaviti grafom i tabelarno.
10. Dat je skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i u njemu je definisana relacija $\rho : (\forall x, y \in A)(x\rho y \Leftrightarrow y = x + 1)$. Odrediti elemente relacije ρ i predstaviti je grafički.

- **Relacija ekvivalencije (RST)** je relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Svaka relacija ekvivalencije ρ razlaže skup na kojem je data na *klase ekvivalencije* $C_x = \{y \in A | x\rho y\}$. Važi: $C_x \neq \emptyset$ i ako nije $x\rho y$ onda $C_x \cap C_y = \emptyset$. Skup svih klasa ekvivalencije naziva se *količnički skup* $A/\rho = \{C_x : x \in A\}$. Sve klase ekvivalencije nekog skupa A čine *particiju* tog skupa na disjunktne podskupove, a njihova unija čini sam skup A .

- **Relacija poretka (RAST)** ρ je relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Ako je ρ relacija poretka na skupu A tada

- $a \in A$ je maksimalni element $\Leftrightarrow \neg(\exists x \in A)(x \neq a \wedge a\rho x)$
- $a \in A$ je najveći element $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(x\rho a)$

Analogno se definišu minimalni i najmanji element. Ako skup ima maksimum (minimum) onda je on jedinstven.

- **Preslikavanje (funkcija)** f skupa A u skup B , u oznaci: $f : A \rightarrow B$, je binarna relacija $f \subset A \times B$ takva da svaki element skupa A je u relaciji sa tačno jednim elementom iz skupa B , tj.

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x, y) \in f \quad \text{ i } \quad (\forall x \in A)(\forall y, z \in B)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow (y = z)).$$

Činjenicu da $(x, y) \in f$ možemo zapisati i sa $y = f(x)$. Element $f(x)$ skupa B se naziva *vrednost preslikavanja* f u tački x . Elemente skupa A nazivamo *originali*, a elemente $f(x) \in B$ nazivamo *slike* originala x . Skup A nazivamo *domen* od f , dok skup svih slika $f(A)$ nazivamo *kodomen* od f .

- Skup uređenih parova $(x, f(x))$ predstavljen tačkama u koordinatnom sistemu naziva se grafik funkcije f .

1. Sledeće binarne relacije na skupu $A = \{p, e, f\}$ predstaviti pomoću grafa i ispitati njihova svojstva.

$$\rho_1 = \{(p, p), (p, e), (e, e), (e, f), (f, f), (f, p)\}$$

$$\rho_2 = \{(p, p), (p, e), (e, e), (e, p), (e, f), (f, e)\}$$

$$\rho_3 = \{(p, e), (e, f), (f, p), (p, f)\}.$$

2. U skupu $X = \{1, 3, 5, 15, 30, 45\}$ data je relacija ρ na sledeći način: $x\rho y \Leftrightarrow x|y$. Odrediti datu relaciju na pogodan način (kao skup uređenih parova, tabelarno ili grafom), a zatim ispitati njene osobine.
3. U skupu $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definisana je relacija $x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Odrediti datu relaciju na pogodan način, a zatim ispitati njene osobine.
4. Date su relacije:

$$(a) \rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \text{ na skupu } A = \{1, 2, 3\},$$

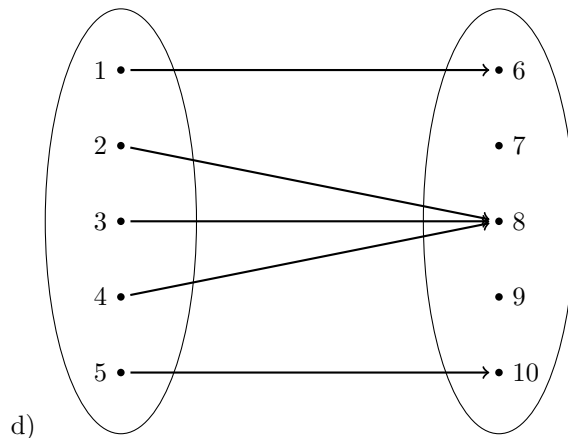
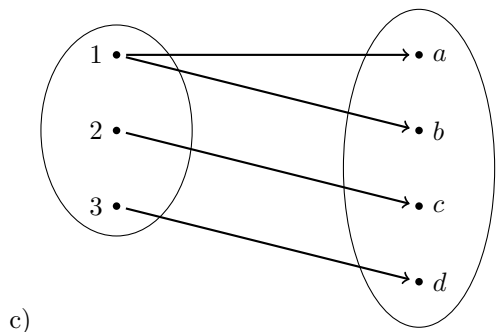
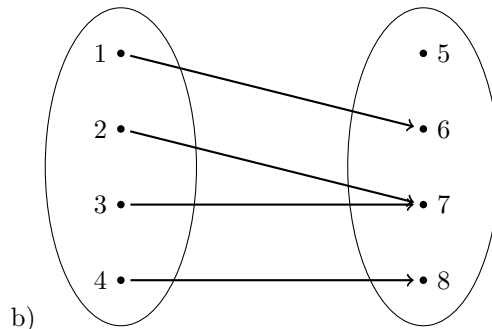
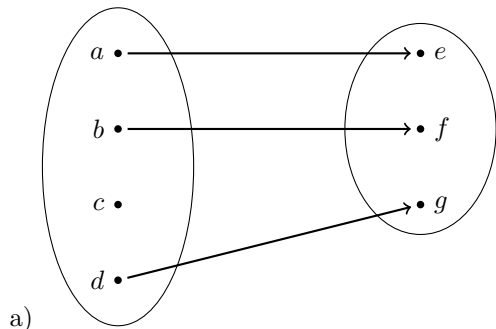
$$(b) \rho_1 = \{(1, 2), (4, 4), (3, 1), (2, 2), (1, 1), (3, 3), (1, 3), (3, 2), (2, 1), (2, 3)\} \text{ na skupu } A = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$(c) \rho_1 = \{(1, 1), (1, 4), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4), (4, 4), (3, 4)\} \text{ na skupu } A = \{1, 2, 3, 4\},$$

Ispitati osobine relacija. Za relacije ekvivalencije naći količnički skup, a za relacije poretka maksimalni (minimalni) element ako postoji.

5. Odredi relaciju ekvivalencije ρ u skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kao skup uređenih parova ili grafom, ako je njen količnički skup: $A/\rho = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$.
6. Dopuni relaciju $R = \{(2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 5), \dots\}$ tako da bude: a) refleksivana, b) simetrična, c) tranzitivna.
7. Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ data je relacija $\rho = \{(1, 1), (3, 2), (5, 4)\}$. Dopuniti relaciju ρ do:
 - (a) relacije ekvivalencije,
 - (b) relacije poretka.

8. Posmatraj date grafičke prikaze i utvrdi koji od njih jestu a koji nisu funkcije. Za one koje nisu funkcije obrazložiti zašto nisu.



9. Dati su skupovi $A = \{m, i, s, a, o\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$ i podskupovi f_1, f_2, f_3, f_4 skupa $B \times A$, definisani na sledeći način:

- (a) $f_1 = \{(1, m), (2, i), (3, s), (3, a), (4, o)\}$,
- (b) $f_2 = \{(1, m), (2, m), (3, m), (4, m)\}$,
- (c) $f_3 = \{(1, m), (2, i), (3, a), (4, o)\}$,
- (d) $f_4 = \{(1, i), (2, a), (4, o)\}$.

Zaokružiti funkcije, a precrtati relacije koje nisu funkcije.

10. Dati su skupovi $X = \{2, 4, 6, 8\}$ i $Y = \{a, b, c, d\}$ i podskupovi f, g, h skupa $X \times Y$, definisani na sledeći način:

- (a) $f = \{(2, d), (4, c), (8, b), (4, a)\}$,
- (b) $g = \{(4, b), (6, c), (8, d)\}$,
- (c) $h = \{(2, a), (4, b), (6, c), (8, a)\}$.

Zaokružiti funkcije, a precrtati relacije koje nisu funkcije.

11. Dat je skup $A = \{a, b, c, d\}$ i binarne relacije na skupu A

$$f = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}, \quad g = \{(a, c), (b, a), (c, a), (d, d)\} \quad \text{ i } \quad h = \{(a, c), (b, a), (c, a), (b, d)\}.$$

- a) Da li su date relacije preslikavanja iz A u A ?
 - b) Odrediti $f(a)$, $f(d)$.
12. Funkciju datu formulom: $F : A \rightarrow B$, $f(x) = x - 2$, $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, napiši u obliku skupa uređenih parova i predstavi grafički.

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti relaciju ekvivalencije čiji je količnički skup:

$$A/\cong \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{7, 6\}\}.$$

2. Funkciju datu formulom: $F : A \rightarrow B$, $f(x) = 2x$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, napiši u obliku skupa uređenih parova i predstavi grafički.

- Za preslikavanje $f : A \rightarrow B$ kažemo da je

- **jedan-jedan** (1-1) ako

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

što je ekvivalentno sa

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2);$$

- **na** ako je $f(A) = B$, tj. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$;
- **bijekcija** ako je jedan-jedan i na.
- Neka su $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ preslikavanja. Tada je **kompozicija preslikavanja f i g** preslikavanje $h : A \rightarrow C$, u oznaci $h = g \circ f$, definisano na sledeći način:

$$(\forall x \in A)(h(x) = g(f(x))).$$

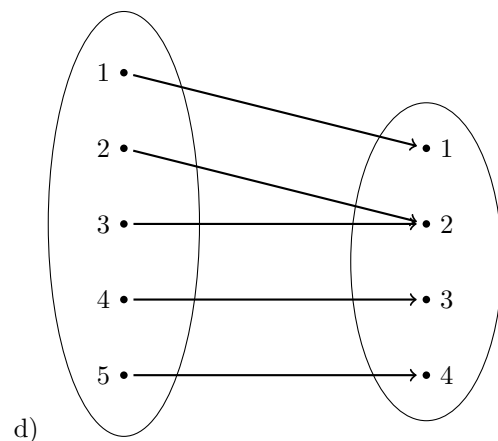
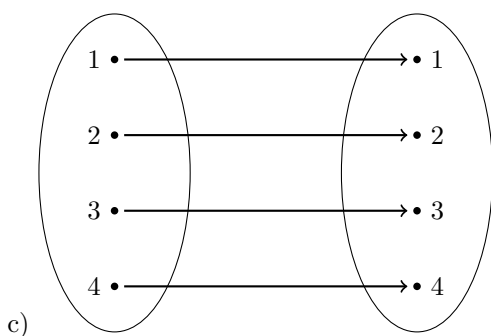
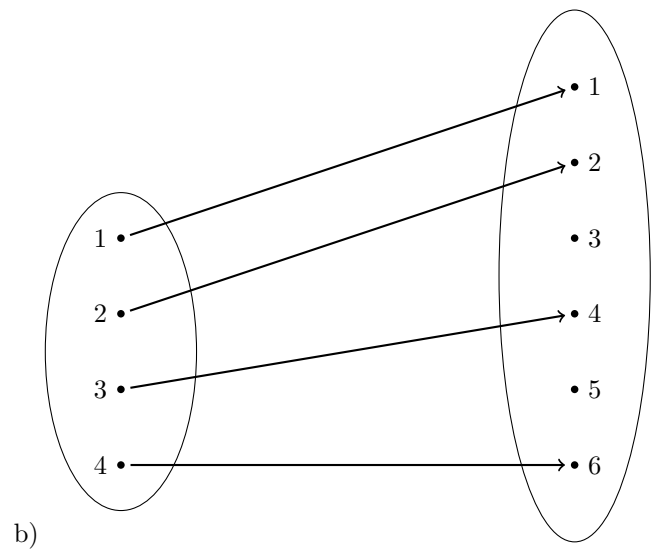
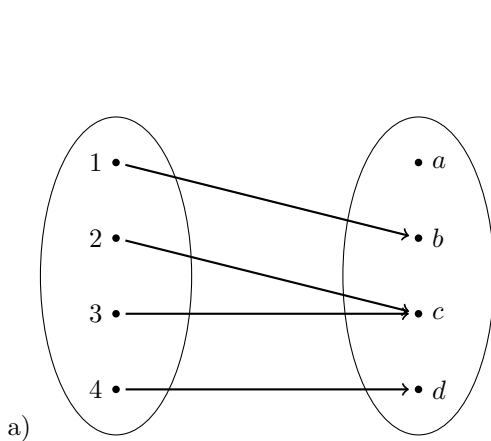
- Preslikavanje skupa A u sebe u oznaci i_A , sa osobinom

$$(\forall x \in A)(i_A(x) = x)$$

naziva se **identičko preslikavanje**.

- Ako je $f : A \rightarrow B$ bijekcija onda sa f^{-1} označavamo preslikavanje skupa B u A koje ima svojstvo: $f \circ f^{-1} = i_B$. U tom slučaju f^{-1} nazivamo **inverzno preslikavanje preslikavanja f** .

1. Utvrdi koja od datih funkcija je surjekcija (NA), injekcija (1-1) ili bijekcija.



2. Neka je $X = \{2, 4, 6\}$ i $Y = \{s, k, u, p\}$. Da li je preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ dato sa $f = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ u & p & s \end{pmatrix}$ bijekcija?
3. Data su preslikavanja: $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$. Odrediti njihova inverzna preslikavanja.
4. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ i $C = \{7, 8, 9\}$ i funkcije $f_1, f_2 : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$:
- $$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & b & c \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & b & c \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$
- a) Odrediti funkcije $h_1 = g \circ f_1$ i $h_2 = g \circ f_2$.
- b) Da li možemo naći inverzne funkcije za date funkcije? Zašto?
5. Date su funkcije
- $$f(x) = 2 + 3x, \quad g(x) = 2 + x, \quad x \in \mathbb{N}.$$
- a) Naći $f(1)$, $g(2)$.
- b) Naći $f(2x)$, $g(3x)$.
- c) Rešiti jednačine $f(x) = 17$, $f(x) = g(x)$.
6. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definisano tako da je $f(x) = \frac{5x-4}{2}$.
- a) Odrediti: $f(6)$, $f(-2)$, $f(3)$.
- b) Rešiti jednačinu $f(x) = 8$
- c) Da li je f "1-1" i na?
- d) Odrediti f^{-1} , ako postoji.
- e) Odrediti $f(f(x))$, $f(f(2))$?
7. Date su funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na sledeći način: $f(x) = \frac{2x-6}{x-1}$ i $g(x) = 2x - 1$. Ako je moguće odrediti: $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$, $g^2(x)$, $(g \circ f)(x)$.
8. Date su funkcije $f_1(x) = 2x + 4$ i $f_2(x) = x^2$. Ispitati da li su date funkcije skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ u samog sebe, odnosno $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, "1-1" i "na".
9. Posmatramo funkcije $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definisane formulama: $f(x) = 2x + 4$ i $g(x) = x^2$. Naći $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$.
10. Neka su date funkcije:
- $$f(x) = 2x + 5, \quad g(x) = 1 + x^2, \quad h(x) = |x|.$$
- Odrediti $f \circ g$, $(f \circ g)(0)$, $f \circ h$, $h \circ g$, $h \circ f$, $(h \circ f)(-1)$, $(f \circ h)(-1)$
11. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data sa
- a) $f(x) = 7x - 1$,
- b) $f(x) = 2x + 3$,
- c) $f(x) = \frac{-10x-3}{13}$.
- Dokazati da je f "1-1" i "na" preslikavanje i odrediti inverznu funkciju f^{-1} .
12. Date su sledeće funkcije: $f(x) = \frac{3x+4}{5}$, $g(x) = 3x + 4$, $h(x) = x^2 - 4$ i $l(x) = \frac{3x-1}{3x+2}$.
- a) Odrediti $g(f(x))$, $f(g(x))$, $h(g(x))$, $l(g(x))$.
- b) Odrediti inverzne funkcije funkcija f, g, l .

Zadaci za samostalan rad

- Na skupu $X = \{a, b, 1, 2\}$ definisati jedno identičko preslikavanje.
- Navešti primer bijektivnog preslikavanja skupa $X = \{2, 4, 6, 8\}$ na skup $Y = \{1, 3, 5, 7\}$.

9 Priprema za kolokvijum

Datum: 08.12.2021.

1. (10 bodova) Na skupu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ date su relacije ρ_1 , ρ_2 i ρ_3 na sledeći način:

$$x\rho_1y \Leftrightarrow |x+y|=2, \quad \rho_2 = \{(0,0), (-2,0), (0,-2), (-2,-1), (2,1), (1,2)\}, \quad \rho_3 = \{(x,x) : x \in A\} \cup \{(-2,2), (-1,1)\}.$$

Predstaviti relaciju ρ_1 kao skup uređenih parova, relaciju ρ_2 pomoću grafa, a relaciju ρ_3 tabelarno.

- (a) Odrediti:

- $\rho_1 \cap \rho_2 =$ _____,
- $\rho_1 \cup \rho_3 =$ _____,
- $\rho_1^{-1} =$ _____,
- $\rho_2^{-1} =$ _____.

- (b) Da li je relacija ρ_3 simetrična? Obrazložiti odgovor. _____

- (c) Da li je relacija ρ_2 tranzitivna? Obrazložiti odgovor. _____

- (d) Da li je relacija ρ_1 refleksivna? Obrazložiti odgovor. _____

2. (10 bodova) Dati su skupovi $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{a, b, c\}$ i funkcije $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow B$:

$$f = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & c & b \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Ispitati osobine funkcija f i g :

i) $f = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & c & b \end{pmatrix}$

ii) $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & a \end{pmatrix}$

1-1 _____ 1-1 _____

NA _____ NA _____

- (b) i) Da li je preslikavanje f bijekcija? Obrazložiti odgovor. _____

- ii) Da li je preslikavanje g bijekcija? Obrazložiti odgovor. _____

- (c) Ako je moguće, odrediti:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

- (d) Ako je moguće, odrediti:

$$g \circ f = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

- (e) Ako je moguće, odrediti:

$$f^{-1}(g(c)) = \text{_____}.$$

11 Linearne jednačine i nejednačine

Datum: 15.12.2021.

1. Spoj jednačine sa odgovarajućim rešenjem.

$$\begin{aligned}0 \cdot x &= 2 \bullet \\2 \cdot x &= 0 \bullet \\2 \cdot x &= 2 \bullet \\0 \cdot x &= 0 \bullet \\\frac{1}{2} \cdot x &= 0 \bullet\end{aligned}$$

- nema rešenje
- $x = 0$
- $x = 1$
- $x = 2$
- $x = 4$
- ima beskonačno mnogo rešenja

2. Rešiti jednačine:

a) $3x + 6 = 3(x + 2)$, b) $5(3x + 1) = 2x + 8$, c) $\frac{x-2}{7} = \frac{3-x}{6}$, d) $(x+3)(2x-5) = (2x+3)(x-1)$.

3. Rešiti jednačine: a) $(x \cdot 4 - 4) : 4 - 4 = 4$; b) $x : 4 - 4 \cdot 4 - 4 = 4$.

4. Rešiti jednačine: a) $\frac{3x+2}{x-1} + \frac{2x+3}{1-x} = 0$, b) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x+1)}{3x-3} = \frac{1}{3}$.

5. Da li su sledeće jednačine ekvivalentne? a) $x - 2 = 4$ i $2x - 18 = x - 12$, b) $x^3 = 125$ i $x^2 = 25$.

6. Na pitanje koliko je sinu godina, otac je odgovorio: Ako se njegov dvostruki sadašnji broj godina umanjiti za trostruki broj godina koji je imao pre 6 godina, dobiće se sadašnji broj godina. Koliko je sinu godina?

7. Toma je zamislio jedan broj. Kada ga je uvećao za 10860, a zatim dobijeni zbir umanjio 2 puta, dobio je količnik 22590. Koji broj je Toma zamislio?

8. Zoran je potrošio $\frac{1}{3}$ svojih para i ostalo mu je još 14 dinara. Koliko je novca imao?

9. Majka ima 27 godina, a ćerka 3 godine. Kroz koliko godina će majka biti četiri puta starija od ćerke?

10. Milan je zamislio neki broj. Prvo ga je umanjio za 2, a potom dobijeni broj uvećao 4 puta. Zatim je tako dobijeni broj uvećao za 3 i rezultat umanjio 5 puta. Na kraju je dobio broj 7. Koji broj je Milan zamislio?

11. Ako neki broj uvećamo tri puta, a zatim još za 3, dobićemo broj 48. Koji je to broj?

12. Odrediti rešenja datih nejednačina u skupu prirodnih brojeva: a) $94 + 4x > 112$, b) $85 - 5y < 54$.

13. Naći najmanji prirodan broj x koji zadovoljava nejednačinu $(x-1)^2 - (x+1)^2 < -10 - x$.

14. Rešiti nejednačinu $\frac{x+1}{3} - \frac{2x+2}{6} - 2 > \frac{5x-1}{3} - 5$ u skupu: a) prirodnih, b) celih, c) realnih brojeva.

15. Odrediti zajedničko rešenje nejednačina $2 + x \geq -\frac{3x}{4}$ i $3(2x-3) \leq 3x$ u skupu prirodnih brojeva.

16. Koristeći brojevnju pravu odredi zajednička rešenja sledećih nejednačina $-3x + 2 < x + \frac{x-2}{2}$ i $0.3x - 0.1 \leq \frac{x}{5} + 1$ u skupu realnih brojeva.

17. Na jednoj parceli ima 560 sadnica. Koliko može biti na drugoj parceli, ako na obe ima manje od 600 sadnica?

18. Od kog broja možeš oduzeti 15000, a da dobijena razlika bude veća od 2375?

19. Ana je zamislila jedan broj. Ako ga umanjis za najveći jednocifren broj dobićeš razliku koja je manja od broja 5. Koji broj je Ana mogla da zamisli?

20. Iz skupa $A = \left\{0.25, \frac{3}{5}, 2\frac{1}{5}, 8\right\}$ izdvoj elemente koji pripadaju skupu rešenja nejednačine $4\frac{4}{5} - \left(x - \frac{8}{15}\right) > 4\frac{1}{3}$.

Zadaci za samostalan rad

1. Rešiti jednačinu $\frac{3x}{x-1} - 12 = 48$.

2. Rešiti nejednačinu $-\frac{2}{3} - 4x > (2x+6) \cdot (-9)$.

- **Skup prirodnih brojeva** je $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Na skupu $\mathbb{N}$ definisane su operacije sabiranja i množenja.
- **Skup celih brojeva** je $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Na skupu $\mathbb{Z}$ pored sabiranja i množenja, definisana je i operacija oduzimanja.
- **Deljivost.** Za dva prirodna ili cela broja m i n , $n \neq 0$ se kaže da je broj m deljiv brojem n , u oznaci $n|m$, ako postoji ceo broj k takav da je $m = k \cdot n$.
- Prirodan broj $n \neq 1$ je prost ako su jedini njegovi delioci 1 i n .
- *Najmanji zajednički sadržalac* prirodnih brojeva m i n je najmanji prirodan broj deljiv sa m i n . Označava se sa $NZS(m, n)$.
- *Najveći zajednički delilac* prirodnih brojeva m i n je najveći prirodan broj koji se sadrži i u m i u n . Označava se sa $NZD(m, n)$. Ako je $NZD(p, q) = 1$ kaže se da su p i q *uzajamno prosti*.
- Skup svih brojeva oblika $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ naziva se skup racionalnih brojeva i označava se sa $\mathbb{Q}$. Prema tome $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$. U skupu $\mathbb{Q}$ definisane su operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja. skupu $\mathbb{Q}$
- Brojevi koji se ne mogu zapisati u obliku razlomka su *iracionalni brojevi*, a *skup iracionalnih brojeva* označavamo sa $\mathbb{I}$.
- *Realni brojevi.* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
- Važi sledeće inkluzije $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- *Apsolutna vrednost* broja x je

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0, \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

- Pravila deljivosti:
 - Broj je deljiv sa 2 ako mu je poslednja cifra deljiva sa 2, odnosno ako mu je poslednja cifra paran broj (0,2,4,6,8).
 - Broj je deljiv sa 4 ako mu je dvocifreni završetak deljiv sa 4.
 - Broj je deljiv sa 8 ako mu je trocifreni završetak deljiv sa 8.
 - Broj je deljiv sa 3 ako mu je zbir cifara deljiv sa 3.
 - Broj je deljiv sa 9 ako mu je zbir cifara deljiv sa 8.
 - Broj je deljiv sa 5 ako mu je poslednja cifra deljiva sa 5, odnosno ako mu je poslednja cifra 0 ili 5.
 - Broj je deljiv sa 25 ako mu je dvocifreni završetak deljiv sa 25, odnosno ako su mu poslednje cifre 00, 25, 50 ili 75.
 - Broj je deljiv sa 7 ako je razlika između zbira trocifrenih klasa koje u broju stoje na neparnim mestima i zbira trocifrenih klasa koje stoje na parnim mestima deljiva sa 7 / zanemarite njegovu poslednju cifru (cifru jedinica) i od ostatka oduzmete dvostruku vrednost zanemarene cifre i dobijete broj deljiv sa 7.
 - Broj je deljiv sa 11 ako je sa 11 deljiva razlika između zbira cifara koje stoje na neparnim mestima i zbira cifara koje stoje na parnim mestima.

- a) Matematičkom indukcijom dokazati da za sve prirodne brojeve n važi: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - b) Izračunati $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 98 + 99 + 100$.
- a) Matematičkom indukcijom dokazati da za sve prirodne brojeve n važi: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$.
 - b) Izračunati $2 + 4 + 6 + \dots + 200$.
- Kolika je razlika najmanjeg celog pozitivnog broja i najvećeg celog negativnog broja?

4. Tačne iskaze zaokruži, a netačne precrtaj. Objasni.
- | | | | |
|----------------|------------------|--------------|-------------------|
| a) $2 128$, | e) $4 1432$, | i) $6 114$, | m) $8 4204$, |
| b) $2 129$, | f) $4 2345678$, | j) $6 308$, | n) $8 98765432$, |
| c) $3 217$, | g) $5 175$, | k) $7 672$, | o) $9 1629$, |
| d) $3 12345$, | h) $5 809$, | l) $7 905$, | p) $9 6543$, |
5. Tačne iskaze zaokruži, a netačne precrtaj. Objasni.
- a) $10|220$, b) $10|221$, c) $11|1364$, d) $11|3729$, e) $11|25176$, f) $12|648$, g) $12|524$, h) $25|250$, i) $25|251$.
6. Da li je broj 8952 sadržitelj broja 8? Obrazloži odgovor.
7. Odrediti NZS i NZD za sledeće brojeve: a) 180 i 2100 b) 46, 69 i 92, c) 770, 1078 i 1452.
8. Izračunati: a) $NZD(1080, 1260, 3150)$, b) $NZS(24, NZD(90, 126))$.
9. Napisati sve različite delioce broja 105? Koliko ih ima?
10. Koliko ima delioca broj 90? Zapiši sve delioce broja 90 u skupu $\mathbb{N}$. Zaokruži njegove proste delioce. Odrediti delioce broja 90 u skupu $\mathbb{Z}$.
11. Ako su brojevi a i b uzajamno prosti, onda je $NZD(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ i $NZS(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. (a) Ako $a|b$, onda je $NZS(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$.
(b) Ako $a|b$, onda je $NZD(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$.
13. Broj 6561 napiši u kanonskom obliku. Zatim zaključi da li je deljiv sa: a) 9, b) 21, c) 27.
14. Na Majinom rođendanu njena majka je poslužila goste sa 26 kolača i 39 čaša soka. Koliko gostiju je imala Maja ako je svaki gost dobio jednak broj kolača i jednak broj čaša soka?
15. Tri trkača startuju istovremeno na kružnoj stazi. Prvi obiđe tu stazu za 10 minuta, drugi za 12 minuta, a treći za 15 minuta. Posle koliko minuta će se sva tri atletičara zajedno naći ponovo na mestu polaska?

Zadaci za samostalan rad

- Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
- Primenom matematičke indukcije dokazati: $3 + 4 + 5 + \dots + (n + 2) = \frac{1}{2}n(n + 5)$, $n \in \mathbb{N}$.

13 Priprema za ispit

Datum: 12.01.2022.

1. (10 bodova) Da li su sledeće jednačine ekvivalentne? Obrazložiti odgovore.

(a) $x^2 - 16 = 0$ i $x - 4 = 0$,

(b) $x - 4 = 0$ i $1 + x = 5$.

2. (10 bodova) Rešiti nejednačinu $-4 + \frac{3x}{4} \leq \frac{5}{6} - 2x$ u skupu prirodnih brojeva.

3. (10 bodova) Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ za relaciju $\rho = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ naći inverznu relaciju ρ^{-1} .

4. (10 bodova) Navesti skup A čiji su elementi $-3, -1, 0, 1, 2, 3$ na tri različita načina. Dat je skup $B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 5\}$. Odrediti $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A \setminus B)$.